近畿大学大学院産業理工学研究科
電子情報工学コース

令和７年度 一般入学試験 （9月期）

数学 (６０分)

【全4問・本文4頁】

※注意事項

1. 試験開始の合図があるまでは，この冊子を開いてはならない．
2. 問題と解答用紙が合冊であり試験終了後すべてを回収する．切り離さない．
3. 本文中の余白（解答欄）を用いて解答に至る計算過程を書きなさい．
4. 本文中の後半部分に下書き用紙があります．必要ならば用いて構わない．

受験番号		氏名	

I. 正方行列 A について，固有値 λ と零ベクトルでない固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つとき，次の問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 正方行列 A の固有値 λ および固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(2) 適当な正則行列 P を用いて，正方行列 A が $P^{-1}AP$ で対角化できることを示せ．

(3) 問 (2) の結果より，A^n を求めよ．$(n = 1, 2, 3 \cdots)$

— 解答欄 —

II. 次のような 2 つの線形写像 f と g がある．

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ への写像 } f : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix},\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ への写像 } g : \begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3x_1^{'} + x_2^{'} \end{bmatrix}$$

(1)　写像 f と写像 g に対する表現行列 A と B をそれぞれ求めよ．

(2)　合成写像 $g \circ f$ の表現行列 C を求めよ．

— 解答欄 —

III. 無限回微分可能な関数 $f(x)$ について，$x = a$ におけるテイラー展開式は

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

で与えられ，零近傍における微小な x について $(|x| \ll 1)$，関数 $f(x)$ は $f(x) \simeq f(0) + xf'(0)$ と近似できることが知られている．次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \sqrt{1+x}$ とするとき，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ を求めよ．

(2) 近似式 $f(x) \simeq f(0) + xf'(0)$ を用いて，$\sqrt{0.9988}$ の値を少数第 4 位まで計算せよ．

— 解答欄 —

IV. t 空間 $(t \geqq 0)$ で連続的に変化する関数 $f(t)$ の s 空間への変換を関数 $F(s)$ を用いて，

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (s \in \mathbb{C})$$

と表現するとき，$F(s)$ は $f(t)$ のラプラス変換とよばれ $\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s)$ と表す．ここでは，a, ω は任意定数であり，j は虚数単位とする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(t) = e^{at}$ とするとき，ラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ を導出せよ．

(2)　問 (1) の結果において，a を純虚数 $j\omega$ とすることで，$f(t) = \sin \omega t$ および $g(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$，$\mathcal{L}[g(t)]$ をそれぞれ導出せよ．

— 解答欄 —

※ 解答と出題意図

I.

線形代数学における行列の固有値や固有ベクトルに対する理解を確認することを意図した。

(1) 固有値 $\lambda = 1$ のとき，固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

固有値 $\lambda = 4$ のとき，固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2 = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) 正則行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$\therefore C = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(3) 対角行列 $C = P^{-1}AP$ より，$\therefore A^n = PC^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+2^{2n+1} & 2-2^{2n+1} \\ 1-2^{2n} & 2+2^{2n} \end{bmatrix}$

II.

線形代数学における線形写像やその表現行列に対する理解を確認することを意図した。

(1) 題意より，表現行列 A および B は, $\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 表現行列は， $\therefore C = BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

III.

解析学や微分積分学の理解と基礎的計算力を確認することを意図した。

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

(2) $f(x) = f(0) + xf'(0)$ より，$f(x) = 1 + \dfrac{x}{2}$ となるので，$\sqrt{0.9988} \approxeq 0.9994$

IV.

システム解析学に必要なラプラス変換の理解と基礎的計算力を確認することを意図した。

(1) $\therefore \mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s-a}$

(2) $\therefore \mathcal{L}[\cos\omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$